Um algoritmo para auxiliar na escolha de métodos de solução para o Problema do Carteiro Chinês: proposta e aplicação em uma grande cidade do interior paulista

Moacir Godinho Filho (UFSCar) moacir@dep.ufscar.br)
Rogério de Ávila Ribeiro Junqueira (LogTrac) rogério@logtrac.com.br)

Resumo: *O problema do carteiro chinês (CPP) é um problema que busca encontrar a mínima distância/custo que deve ser coberta por um elemento, passando por todos os arcos de uma rede pelo menos uma vez e retornando até a origem. O CPP se divide basicamente conforme o tipo de orientação da rede que se propõe a resolver. Existem basicamente três tipos de orientação de redes possíveis para este problema: redes direcionadas, não direcionadas e mistas. O presente trabalho, por meio da estruturação e análise de uma revisão bibliográfica, propõe um algoritmo para auxiliar na escolha de métodos adequados para se resolver o CPP. Esta escolha é baseada nas características do problema e dos métodos de solução, a saber: orientação do grafo, conectividade do grafo, grafo Euleriano ou não, porte do problema, complexidade e objetivo das soluções. O algoritmo desenvolvido é ilustrado por meio de sua utilização na escolha de métodos para resolução do CPP em casos reais em uma grande cidade.*
Palavras chave: *problema do carteiro chinês, algoritmo, escolha de métodos de solução, casos reais*

1. Introdução

Rede ou grafo é definido por Larson & Odoni (1981) como uma entidade G (N,A) que consiste de um conjunto finito de N nós (ou vértices) e de um conjunto finito de A arcos (ou arestas) que conectam pares de nós. Dentro do escopo da teoria de grafos, o problema do carteiro chinês (CPP) é um problema no qual, dado um grafo G (N,A) cujos arcos (i,j) tem um comprimento não negativo c_{ij}, deseja-se identificar o mínimo comprimento de um caminho que se inicie em algum nó , passe por todos os arcos da rede pelo menos uma vez e retorne ao nó inicial (AHUJA et al, 1993). Desde a sua aparição na moderna literatura em Kwan (1962) o problema do carteiro chinês vem ganhando muita atenção de pesquisadores que tratam de logística, principalmente logística urbana.

Na literatura, os problemas do carteiro chinês se dividem basicamente conforme o tipo de orientação da rede que se propõe a resolver. Existem basicamente três tipos de orientação de redes possíveis para este problema: redes direcionadas, não direcionadas e mistas. De acordo com Ahuja *et al* (1993) um grafo ou rede direcionada G (N,A) consiste de um conjunto de N nós e um conjunto de A arcos cujos elementos são pares ordenados de nós distintos. Ainda de acordo com estes autores um grafo ou rede não direcionada G (N,A) pode ser definido do mesmo modo que um grafo direcionado com a exceção de que os arcos são pares não ordenados de nós distintos. As redes mistas são aquelas nas quais alguns arcos são pares ordenados e outros são pares não ordenados de nós distintos (LARSON & ODONI, 1981). O CPP pode ser destinado a resolver problemas relativos a estes três tipos de redes.

O presente trabalho trata deste assunto. Primeiramente é realizada uma revisão da literatura sobre o tema CPP. Baseado na estruturação e análise da revisão bibliográfica é proposto um algoritmo para auxiliar na escolha de métodos adequados para se resolver o CPP. Esta escolha é baseada nas características do problema e dos métodos de solução, a saber: orientação do grafo, conectividade do grafo, grafo ser ou não *Euleriano*, porte do problema e complexidade e objetivo das soluções. Finalmente o algoritmo desenvolvido é ilustrado por meio de sua utilização na escolha de métodos para resolução do CPP em problemas reais em uma grande cidade brasileira.

A estrutura do presente trabalho é o que segue: na seção 2 é estruturada uma revisão da literatura sobre CPP. Na seção 3 o algoritmo para auxiliar a escolha de métodos adequados para a resolução do CPP é apresentado. Na seção 4 são sugeridos métodos de solução para exemplos de problemas reais utilizando o algoritmo desenvolvido. Na seção 5 são tecidas algumas conclusões.

Antes de entrar na seção 2, são apresentadas a seguir algumas definições importantes em teoria de grafos (baseado em LARSON & ODONI, 1981), bem como a notação matemática utilizada no trabalho. Isto facilitará o entendimento e a aplicação do trabalho.

Algumas definições importantes dentro da teoria de grafos

- **Grau de um nó** => num grafo não direcionado é o número de arcos incidentes nele; num grafo direcionado tem-se o grau de entrada e o grau de saída de um nó;
- **Caminho (ou cadeia)** => é uma seqüência de arcos adjacentes e nós; nos grafos direcionados, os caminhos também são direcionados;
- **Ciclo (ou circuito)** => é um caminho cujos nós inicial e final coincidem;
- **Grafo não direcionado conectado**=> é um grafo no qual existe um caminho entre todos os pares de nós i, j $\in$ N
- **Grafo direcionado conectado =>** um grafo direcionado é conectado se o seu grafo não direcionado associado (isto é, o grafo que resulta se a orientação é removida de seus arcos) for conectado.

Notação utilizada nos modelos matemáticos:

$n \Rightarrow$ *número de nós na rede*

$m \Rightarrow$ *número de arcos na rede*

$l(i,\ j) = l_{i,\,j} \Rightarrow$ *comprimento do arco* $(i,\ j)$

$x_{ij} \Rightarrow$ *número de vezes que o carteiro percorre o arco* $(i,\ j)$

$G(N, A) \Rightarrow$ *grafo com* N *nós e* A *arcos*

2. A estruturação de uma revisão bibliográfica sobre CPP

Nesta seção são tratados os principais métodos propostos na literatura para a resolução do CPP. Estes métodos se utilizam basicamente de algoritmos e de modelos de programação matemática. Não são focadas neste trabalho novas abordagens para o CPP que estão surgindo recentemente, como, por exemplo, a utilização de algoritmos genéticos (JIANG & KANG 2003), de DNA *Computing* (YIN *et al*, 2002), e da heurística GRASP (MARTI *et al*, 2002), dentre alguns outros métodos de solução.

Basicamente a literatura sobre CPP se divide em três grandes grupos, conforme o problema seja voltado à resolução de problemas em grafos não direcionados, direcionados e mistos. Portanto esta seção é dividida exatamente de acordo com estas três classes de problemas.

2.1 O CPP para redes não direcionadas

O primeiro resultado conhecido referente ao CPP para redes não direcionadas é devido a Euler (1736). Euler (1736) mostrou que um grafo conectado não direcionado G (N,A) tem um roteiro que passa exatamente uma vez por todos os seus arcos se e somente se todos os nós deste grafo tiveram exatamente zero nós de grau ímpar (em outras palavras, se todos os nós forem pares). Já para um grafo não conectado ter um roteiro que passa exatamente uma vez por todos os seus arcos, o número de nós de grau ímpar deve ser exatamente 2 nós. Esta importante relação (tanto para grafos conectados como não conectados) é conhecida na literatura por <u>Teorema de Euler</u>. Os grafos nos quais existem roteiros que passam exatamente uma única vez por todos os arcos são denominados grafos *Euleriano*s (os roteiros formados dentro destes grafos são denominados: circuito ou ciclo *Euleriano* para grafos conectados e caminho ou cadeia Euleriana para grafos não conectados).

Uma vez determinado que um grafo é *Euleriano*, ou seja, tem um roteiro que passa exatamente uma vez por todos os arcos deste grafo a solução para se encontrar os circuitos ou caminhos *Euleriano*s neste grafo é trivial. Uma série de algoritmos, dentre eles o algoritmo de Fleury, mostrado em Kauffman (1967), o algoritmo de Larson & Odoni (1981), o algoritmo de Edmonds & Johnson (1973), com complexidade O(n), além de outros algoritmos que se encontram no trabalho de Fleischner (1991) *apud* Eiselt *et al* (1995) tratam desta questão. Neste trabalho mostramos o algoritmo mostrado em Larson & Odoni (1981). Este algoritmo é muito simples e se resume a um único passo, mostrado a seguir. Para mantermos uma notação única ao longo do trabalho, ele será denominado algoritmo 1 (complexidade O (n)).

<u>Algoritmo 1: Obtenção de um circuito *Euleriano* em um grafo não direcionado</u>

Seja G(N,A) um grafo conectado com zero nós de grau ímpar (circuito *Euleriano*). Comece com qualquer nó de G e percorra sucessivamente os arcos de G, apagando cada arco percorrido; nunca percorra um arco que seja um *isthmus* (este termo na literatura também é denominado ponte e pode ser definido como um arco que ao ser eliminado divide o grafo restante em dois componentes conexos separados). Continue este procedimento até que todos os nós de G tenham sido apagados – neste ponto o "roteiro percorrido" é um circuito *Euleriano* (a metodologia leva ao nó inicial). Para os casos de grafos não conectados, o algoritmo é semelhante, com algumas modificações: o grafo G (N,A) tem inicialmente exatamente 2 nós de grau ímpar, o algoritmo deve ser iniciado exatamente por um destes nós ímpar e no final do algoritmo se encontra o caminho *Euleriano* (a metodologia leva ao outro nó de grau ímpar).

O algoritmo 1, mostrado acima, serve para as situações nas quais se tem um circuito ou caminho *Euleriano* em um Grafo. Porém, muitas vezes um Grafo não apresenta inicialmente um circuito ou caminho de Euler. Para estes casos específicos GUAN (1962) observou que um grafo não direcionado e conectado G tem sempre um número par de nós de grau ímpar e que, portanto, o grafo G pode ser transformado em um grafo G' (N, A') através da inclusão de arcos artificiais duplicados, que transformem G em um grafo *Euleriano*. Na literatura muitos algoritmos trabalham exatamente com esta idéia. É o caso do algoritmo mostrado em Larson & Odoni (1981). Este algoritmo é resumido abaixo e será denominado algoritmo 2 (complexidade $O(n^3)$).

Algoritmo 2: Encontrar circuito *Euleriano* em grafo inicialmente não *Euleriano*

PASSO 1: Identifique os m nós de grau ímpar de G(N,A). O valor de m é sempre par.

PASSO 2: Encontre o "casamento de pares com a mínima distância" (chamado na literatura de *minimun-lenght pairwise matching*) desses m nós e identifique os m/2 caminhos mínimos deste "casamento" ótimo.

PASSO 3: Adicione estes m/2 caminhos mínimos como arcos ligando os nós do "casamento" ótimo. O novo grafo G'(N, A') não contém nós de grau ímpar.

PASSO 4: Encontre um circuito *Euleriano* em G'(N, A'). Este circuito é a solução ótima do CPP no grafo original G (N,A) e o seu comprimento é igual ao comprimento total dos arcos em A, mais o comprimento total dos m/2 caminhos mínimos.

A respeito do algoritmo 2 devemos tecer algumas considerações especiais sobre os passos 4 e 2. O passo 4, encontrar o circuito *Euleriano*, significa aplicar o algoritmo 1 mostrado anteriormente. Com relação ao passo 2 nota-se que este é crucial. Neste passo, deve-se encontrar o "casamento de pares com a mínima distância". Isto significa encontrar, dentre um número par de nós, a combinação dois a dois que fornece a menor distância total entre eles. Para se resolver este problema pode-se empregar um método manual, o qual Morábito (1996) cita que, num contexto geográfico, fornece excelentes soluções ou então um método exato baseado em programação matemática. Larson & Odoni (1981) citam dois algoritmos que realizam o "casamento" ótimo do PASSO 2; o algoritmo de Edmonds & Johnson (1973), o qual tem complexidade $O(n^3)$ e o algoritmo de Christofides (1975). Também uma versão modificada do modelo de Baker (1983) para grafos conectados, mostrada em Wang & Wen (2002), pode ser utilizada. Além destes, existe uma série de outros algoritmos para resolver o problema do "casamento", como por exemplo, o modelo de programação inteira mostrado em Eiselt *et al* (1995), o modelo de Lawler (1976), com complexidade $O(n^3)$, o modelo proposto por Galil *et al* (1986) e o modelo de Derigs & Metz (1991). Neste trabalho é utilizada uma versão modificada (voltado para grafos não orientados) do modelo proposto por Baker (1983). Denomina-se este modelo de modelo matemático 1.

Modelo matemático 1: Encontrar o mínimo custo de aumento de um grafo não direcionado

$$Min \sum_{(i,j)\in A} l_{ij} x_{ij}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j;(j,i)\in A} x_{ji}, \forall i$$

$$x_{ij} + x_{ji} \geq 1 \quad \forall (i,j) \in A$$

Para a resolução em grafos não conectados deve ser utilizado um dos métodos exatos citados acima, uma vez que métodos manuais se tornam inviáveis para problemas maiores. De acordo com Morábito (1996) a combinação de casamentos no passo 2 do algoritmo 2 cresce muito rapidamente; por exemplo, quando o valor de m é 10, existem 945 combinações possíveis.

Ainda dentro desta discussão sobre a resolução do CPP em grafos não orientados existe na literatura um número grande de variantes, como, por exemplo, Frederickson *et al* (1978), os quais trabalham com o CPP para o caso de múltiplos veículos.

2.2 O CPP para redes direcionadas

Para o caso de grafos direcionados, diferentemente dos grafos não direcionados, existe uma condição de extrema importância para que o CPP tenha solução. Esta condição é que o grafo deve ser fortemente conectado, ou seja, deve haver um caminho direcionado ligando todos os nós do grafo (WANG & WEN, 2002). Nas palavras de Morábito (1996): "todo nó deve ser alcançável de qualquer outro nó". Portanto, em redes direcionadas, são excluídos deste trabalho grafos não conectados.

Assim como nos grafos não direcionados, o primeiro passo para se resolver o problema CPP em redes direcionadas é a verificação se o grafo possui um circuito *Euleriano*. Para isto pode-se utilizar uma versão modificada do teorema de Euler, mostrado em Morábito (1996). Este algoritmo é apresentado a seguir. Nas palavras de Morábito (1996) este algoritmo é a "versão orientada" do teorema de Euler.

<u>"Versão Orientada do Teorema de Euler"</u>

Um grafo conectado orientado G (N,A) possui um circuito de Euler se e somente se contiver todos os nós com grau de entrada igual ao grau de saída (na literatura de grafos se um grafo tiver esta característica ele é conhecido como grafo simétrico).

Caso o grafo possua um circuito de Euler, o problema passa a ser determiná-lo. Para se realizar isto a literatura traz vários algoritmos, dentre eles podemos citar uma adaptação do algoritmo de Fleury para grafos direcionados encontrado em Christofides (1975), o algoritmo sugerido por Van Aardenne-Ehrenfast & De Bruijn (1951) ou mesmo o algoritmo mostrado em Morábito (1996). Neste trabalho é mostrado este último algoritmo, o qual passa a ser denominado algoritmo 3.

<u>Algoritmo 3: Determinação do circuito direcionado de Euler</u>

Decompor o conjunto de arcos A num conjunto de ciclos direcionados. Começar o roteiro por algum nó de um dos ciclos, digamos W1, visitando os nós deste ciclo em ordem até retornar ao nó inicial ou encontrar um nó que também pertença a um outro ciclo ainda não visitado, digamos W2. No primeiro caso o roteiro está completo, no segundo caso visite o ciclo W2 antes de fechar o ciclo W1. Repita o mesmo procedimento para o ciclo W2 e assim por diante.

O algoritmo 3 ou as outras referências citadas podem ser usadas no caso em que se tem um grafo direcionado *Euleriano*. Nos casos em que a aplicação da versão orientada do Teorema de Euler não identificar um grafo *Euleriano*, então se deve utilizar uma metodologia para tornar o grafo *Euleriano*. A idéia aqui é a mesma dos grafos não orientados, ou seja, deve-se acrescentar arcos até tornar o grafo *Euleriano*. O objetivo passa a ser então fazer isto a um menor custo (ou distância entre nós). Para se realizar isto são propostos na literatura diversas soluções, a grande maioria delas baseada em programação matemática. Estes modelos são denominados na literatura de problemas de fluxo de custo mínimo (*minimum cost flow problem*). Exemplos são encontrados nos trabalhos de Edmonds & Johnson, 1973 (complexidade O (n^3)); Orloff (1974); Beltrami & Bodin, 1974 (complexidade O(mn^2));

Baker (1983); Lin & Zhao, 1988 (complexidade $O(kn^2)$. O fator k citado está relacionado a estrutura da rede; para uma rede dispersa, k pode ser bem menor que m e n. Os modelos citados de Edmonds & Johnson (1973); Orloff (1974) e Beltrami & Bodin (1974) para resolução do problema de fluxo de custo mínimo trabalham com uma abordagem do clássico problema do transporte, o qual segundo Rardin (1998) é um caso especial dos modelos de fluxo de custo mínimo.

É mostrado seguir um modelo proposto por Baker (1983), o qual passa a ser denominado modelo matemáticos 2.

<u>Modelo matemático 2: Determinação de um grafo *Euleriano* para redes direcionadas</u>

$$Min \sum_{(i,j)\in A} l_{ij} x_{ij}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j;(j,i)\in A} x_{ji}, \forall i$$

$$x_{ij} \geq 1 \quad \forall (i,j) \in A$$

Uma vez obtido um grafo direcionado *Euleriano*, a tarefa passa a ser somente encontrar o circuito *Euleriano* deste grafo, o que pode ser feito utilizando o algoritmo 3 mostrado anteriormente.

Assim como no caso dos grafos não direcionados, também para grafos direcionados a literatura apresenta uma série de extensões do CPP básico. Por exemplo Wang & Wen (2002) trabalham como CPP para grafos orientados com restrições de tempo. Lin & Zhao (1988) desenvolvem um algoritmo para o CPP direcionado, o qual também pode ser utilizado para o caso de múltiplos veículos (m-CPP). O trabalho de Ghiani & Improta (2000) traz algoritmos para resolver o problema do CPP hierárquico, tanto para redes direcionadas como para não direcionadas.

2.3 O CPP para redes mistas

Uma rede mista contém tanto arcos orientados como não orientados. Assim como nas redes direcionadas, nas redes mistas também o grafo deve ser totalmente conectado para que o CPP tenha solução.

A condição para que uma rede mista tenha um roteiro *Euleriano* é que esta rede seja par e balanceada (EISELT *et al*, 1995). Uma rede par é aquela na qual o número total de arcos (direcionados ou não) em cada um de seus nós é par; em outras palavras a rede não deve ter nós de grau ímpar. Já uma rede balanceada é aquela na qual, para todo nó genérico S, a diferença entre o número de arcos direcionados que saem deste nó e o número de arcos direcionados que entram neste nó deve ser menor ou igual ao número de arcos não direcionados que ligam S a qualquer nó (NOBERT & PICARD (1991) *apud* EISELT *et al* (1995). Estas duas condições são versões modificadas do Teorema de Euler para o caso de redes mistas.

Caso o grafo misto seja *Euleriano*, o problema passa a ser determinar o roteiro *Euleriano* neste grafo. Eiselt *et al* (1995) sugere uma metodologia em três etapas para se encontrar um roteiro *Euleriano* em um grafo misto *Euleriano*.

Metodologia de Eiselt *et al* (1995) para determinar um roteiro *Euleriano* em um grafo misto

PASSO 1: atribuir direção a alguns arcos de tal forma que o grafo se torne simétrico (como vimos anteriormente um grafo simétrico é aquele no qual em cada nó o número de arcos que chegam é igual ao número de nós que saem);

PASSO 2: atribuir direção aos arcos restantes;

PASSO 3: uma vez que o grafo esteja completamente direcionado encontrar o circuito *Euleriano* utilizando um algoritmo para grafos direcionados, como os mostrados na seção 2.2 (adaptação do algoritmo de Fleury para grafos direcionados, o algoritmo de Van Aardenne-Ehrenfast & De Bruijn (1951) ou o algoritmo 3.

Uma observação sobre este procedimento é que algoritmos para as etapas 1 e 2 são mostradas em Eiselt *et al* (1995). A etapa 1 é baseada em Ford & Fulkerson (1962).

Caso o grafo não seja *Euleriano* deve-se proceder a uma abordagem semelhante à descrita anteriormente para os casos não direcionados e direcionados: duplicar um número suficiente de arcos de tal forma que o grafo se torne *Euleriano*. De acordo com Eiselt *et al* (1995) muitos autores usam a programação inteira para determinar este aumento do grafo misto a um custo mínimo, porém os resultados computacionais são apenas esboçados e, portanto, comparações entre as abordagens são difíceis. A única conclusão a respeito de todos estes modelos é que eles são ineficientes computacionalmente e que somente problemas de pequeno e médio porte podem ser resolvidos (PEARN & LIU, 1995). Exemplo deste tipo de abordagem exata para a resolução do CPP misto pode ser encontrado em Grotschel & Win (1992); Christofides *et al* (1983) e Morábito (1996). Neste trabalho trabalhamos computacionalmente com o modelo encontrado em Morábito (1996). Este modelo inicialmente prevê que todos os arcos não orientados (i,j) devem ser transformados em dois arcos orientados (i,j) e (j,i) e então deve-se utilizar o modelo matemático de fluxo de custo mínimo mostrado a seguir. Este modelo é denominado neste modelo de modelo matemático 3.

Modelo matemático 3: Modelo de fluxo de custo mínimo para grafos mistos

$$Min \sum_{(i,j)\in A} l_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A'} l_{ij} x_{ij}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j:(i,j)\in A'} x_{ij} + \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} + \sum_{j:(j,i)\in A'} x_{ij}, \forall i$$

$$x_{ij} + x_{ji} \geq 1,\ \forall (i,j) \in A'$$

$$x_{ij} \geq 1,\ \forall (i,j) \in A$$

$$x_{ij} \text{ int } \forall (i,j) \in A$$

$$x_{ij} \text{ int } \forall (i,j) \in A'$$

Como o CPP para redes mistas é um problema NP-completo e, portanto, encontrar a solução ótima apresenta grande dificuldade, a literatura específica sobre o tema tem proposto soluções heurísticas para encontrar soluções aproximadas para o problema. As principais heurísticas são os chamados algoritmo misto 1 (EDMONDS & JOHNSON, 1973) e o algoritmo misto 2

(FREDERICKSON, 1979). Pearn & Liu (1995) apresentou duas modificações para os algoritmos 1 e 2, denominando estes algoritmos como: algoritmo misto modificado 1 e algoritmo misto modificado 2. Estes novos algoritmos conseguiram alguns resultados computacionais melhores do que os algoritmos originais. Ainda sobre heurísticas para o CPP misto, Pearn & Chou (1999) apresentaram duas melhorias em relação aos quatro algoritmos mencionados. Estes autores denominaram estes novos algoritmos como: algoritmo misto melhorado 1 e algoritmo misto melhorado 2. De acordo com estes autores, resultados computacionais mostraram que estes dois algoritmos melhoraram significantemente as soluções propostas pelos quatro algoritmos anteriores.

3 O algoritmo proposto

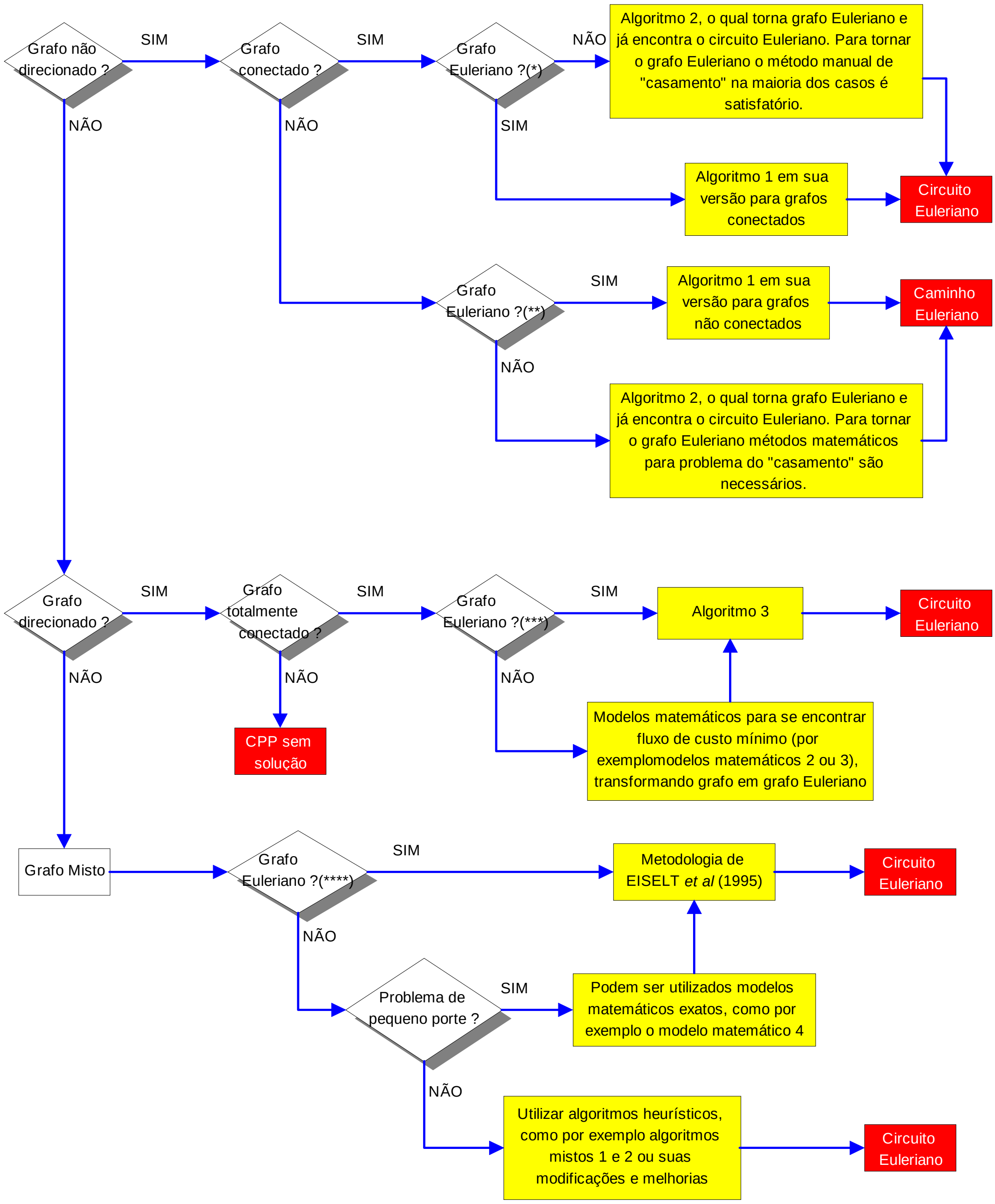
A partir da revisão da literatura mostrada na seção anterior nota-se que o método básico para a solução do CPP pode ser resumido em três passos básicos, independentemente da rede ser não direcionada, direcionada e mista:

- <u>Primeiro Passo</u>: Verificar se o grafo é *Euleriano*. Caso a resposta seja afirmativa, então vá para o terceiro passo; caso contrário vá para o segundo passo.
- <u>Segundo Passo</u>: Obter um grafo *Euleriano*. Após este passo deve-se ir para o terceiro passo
- <u>Terceiro Passo</u>: Obter o circuito ou caminho *Euleriano* a partir do grafo *Euleriano*.

Nesta seção é proposto o algoritmo para escolha na prática de uma abordagem de solução para o CPP. Este algoritmo é mostrado na figura 1.

O algoritmo proposto se baseia em alguns pontos que são fundamentais para a escolha de um método de solução para o CPP, a saber:

- Características do problema: podem ser resumidas em quatro pontos chave: i) orientação do grafo (não direcionado, direcionado ou misto); ii) conectividade do grafo (grafos conectados ou não conectados); iii) grafo ser ou não inicialmente *Euleriano* e iv) porte do problema (com relação ao número de nós e arcos);
- Características dos métodos de solução (estão relacionados à complexidade e objetivo das soluções): as soluções podem ser: i) algoritmos e teoremas para se determinar se grafo é ou não *Euleriano*; ii) soluções matemáticas simples e manuais para se encontrar o grafo *Euleriano* com mínimo custo; iii) algoritmos com complexidade até no máximo O (n^3) para se encontrar o roteiro *Euleriano*; iv) modelos matemáticos baseadas em programação linear com complexidade até no máximo $O(n^3)$ para se encontrar o grafo *Euleriano* com mínimo custo e v) soluções matemáticas baseadas em programação inteira com complexidade NP-completa para se encontrar o grafo *Euleriano* com mínimo custo. Como podemos verificar, os objetivos das soluções estão relacionados aos três passos de resolução do CPP identificados anteriormente. O item i) está relacionado ao passo 1, os itens ii), iv) e v) estão relacionados ao passo 2 e o item iii) está relacionado ao passo 3.



Legenda

=> outputs

=> métodos a serem utilizados

Observações:

(*) => utilizar o teorema de Euler para grafos conectados

(**) => utilizar o teorema de Euler para grafos não conectados

(***) => utilizar a versão orientada do teorema de Euler (grafos simétricos)

(****) => verificar se os grafos são pares e balanceados

Figura 1: Algoritmo que auxilia na escolha de uma abordagem adequada para a resolução do CPP

4. Ilustração da utilização do algoritmo em casos reais

Para ilustrar a utilização do algoritmo foram entrevistadas duas empresas de setores distintos que confrontam com a necessidade de resolver problemas de cobertura de arcos. A primeira entrevista foi feita à ***Vega Engenharia*** de São Carlos, empresa que atua na coleta de lixo do município. A segunda entrevista foi à filial dos ***Correios*** de São Carlos.

4.1 As características dos casos analisados

4.1.1 Coleta de lixo

A coleta de lixo de uma cidade utilizando caminhões pode ser considerada um problema de cobertura de arcos, pois as ruas representam os arcos, os cruzamentos de ruas, os nós e a área de influência seria o grafo completo. Os caminhões têm que percorrer todas as ruas (arcos) de sua área de influência, coletando o lixo das casas. Como esses veículos devem obedecer às regras de trânsito e as ruas podem ter sentido único ou mão dupla, o grafo pode ser considerado misto. Devido à irregularidade no traçado das ruas e quadras, os grafos podem não ser *euleriano*s. Sendo assim, na determinação dos roteiros dos caminhões está implícito encontrar uma rota *euleriana* em um grafo misto.

4.1.2 Correios

Para os correios toma-se como unidade de análise o carteiro. O carteiro também defronta com a possibilidade de sua área de influência ser caracterizada por um grafo não *euleriano*. No entanto, diferentemente do caso anterior, o carteiro não necessariamente precisa respeitar às regras de trânsito. Sendo assim, ele defronta com um problema de encontrar uma rede *euleriana* em um grafo não direcionado.

4.2 As entrevistas de campo e resultados

O foco das entrevistas foi responder às seguintes questões: i) Qual o tamanho do problema que as empresas tratam?; ii) Qual o método para a geração de roteiros que elas utilizam?

4.2.1 Coleta de lixo

A empresa possui uma frota de 12 caminhões coletores com capacidade de 11,5 toneladas que coletam o lixo da cidade de São Carlos e levam ao aterro local. Cada caminhão percorre coletando lixo em média de 35 a 40 km no período diurno. O caminhão percorre de 20 a 30 km até que esgote sua capacidade de armazenagem de lixo. Incluindo o trajeto até o aterro, os caminhões em um turno percorrem em média 110 km. Segundo o entrevistado, a cidade é dividida em setores e os roteiros dos caminhões são em geral pré-definidos, quando ocorrem mudanças são levados em consideração a distância a ser percorrida, o horário do dia e a densidade de lixo da área a ser coletada.

4.2.2 Correios

Os carteiros destinam 3,5 horas de seu turno à entrega de cartas, o restante das 8 horas de expediente é destinada à separação das cartas dentre outras tarefas internas. A distância diária percorrida pelos carteiros varia de acordo com o tipo de área de entrega. Em áreas de alta densidade populacional, como é a área central de São Carlos, a distância percorrida por carteiro é menor (8 a 12 km percorridos por dia), pois há maior número de pontos de entrega. Já em áreas de baixa densidade como os bairros, essa distância aumenta (20 a 23 km percorridos por dia). Os carteiros são distribuídos na cidade de acordo com os CEP’s e bairros dentro deste. Em geral, a área de cobertura de um carteiro é de um bairro, embora possa atender outro quando for conveniente. Definida sua área de cobertura, os carteiros traçam seu próprio roteiro.

Na tabela 1 é mostrada uma comparação entre características dos dois casos pesquisados.

Variável	Coleta de Lixo	Correio
Unidade	Caminhão	Carteiro
Tipo de Grafo	Misto	Não Direcionado
Tamanho do grafo para uma unidade	350 a 400 arcos, diurno	80 a 120 arcos, centro 200 a 230 arcos, bairro
Determinação do roteiro	Centralizada	Próprio Carteiro

Tabela 1: Comparação entre algumas características dos casos analisados

4.3 A utilização do algoritmo proposto na escolha de métodos de solução do CPP para os casos analisados

O algoritmo proposto na seção 3 permite selecionar as soluções ideais para o CPP referente aos dois casos mostrados. A seguir é feita esta seleção para os dois casos.

Para o caso da coleta de lixo, um grafo misto, tem-se que o grafo inicialmente não será *Euleriano*. Este problema é de pequeno porte (aproximadamente 350 a 400 arcos). De acordo com estas características, um modelo de programação matemática (como o modelo 4 mostrado, por exemplo) deve ser utilizado para obter, a um mínimo custo, um grafo *Euleriano*. Tendo-se o grafo *Euleriano*, utiliza-se a método de Eiselt *et al* (1995) para se encontrar o circuito *Euleriano*. Para tornar a modelagem mais realidade, em situações que a rota não está dimensionada, bem como os setores de atuação dos caminhões predefinidos, é interessante adicionar múltiplos veículos e conseqüentemente inserir restrições de capacidade nos veículos. Nestes casos o grafo analisado passa a ser a cidade como um todo.

O caso dos correios é um grafo não direcionado e conectado. Inicialmente tem-se que o grafo não é *Euleriano*. Portanto, a solução para o problema dos correios pode-se utilizar o algoritmo 2 mostrado anteriormente. Para encontrar o casamento ótimo podem ser utilizados métodos manuais. Porém devido ao número de nós ser de aproximadamente 200, também pode ser utilizado um método matemático para o casamento. Para ampliar a abrangência do problema estudado, quando não se tem as áreas de distribuição de cartas pré-definidas, é importante inserir múltiplos agentes na modelagem matemática. Neste caso o grafo analisado passa a ser a cidade como um todo.

5. Conclusões

O presente trabalho trata do problema do carteiro chinês (CPP). Por meio de uma revisão da literatura sobre o tema são identificados e estruturados métodos de solução para os três tipos de problemas CPP: grafos não direcionados, direcionados e mistos. Baseado na análise da revisão bibliográfica (pesquisa teórico-conceitual) foi proposto um algoritmo que visa auxiliar na escolha de um método adequado de solução do CPP. Este algoritmo foi ilustrado através de sua utilização em dois casos em problemas logísticos em uma cidade brasileira com aproximadamente 200.000 habitantes. Estes problemas são a coleta de lixo e correios.

Acreditamos que as duas principais contribuições deste trabalho são: i) apresentar um algoritmo simples e de fácil utilização (foi ilustrado sua utilização prática) que se presta à escolha de modelos de resolução para o CPP; e; ii) auxiliar no ensino de abordagens e métodos para a resolução do CPP.

6. Referências

AHUJA, R.K.; MAGNANTI, T.L.; ORLIN, J.B.: *Network Flows – Theory, Algorithms and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1993.

BAKER, E.K.: An exact algorithm for the time constrained travelling salesman problem. *Operations Research,* vol. 31, n. 5, pp. 938-945, 1983.

BELTRMI, E.; BODIN, L.: Networks and vehicle routing for municipal waste collection. *Networks,* vol 4, pp. 65-94, 1974.

CHRISTOFIDES, N.: *Graph Theory – An Algorithmic Approach*. Academic Press, London, 1975.

CHRISTOFIDES, N.; BENAVENT, E.; CAMPOS, A.; CORBRAN, A.; MOTA, E.; An optimal method for the mixed postman problem. *Proceedings of the 11th IFIP Conference, Copenhagen, Denmark*, pp. 641-649, 1993.

DERIGS, U. & METZ, A.: Solving (Large Scale) Matching Problems. *Mathematical Programming*, vol. 50, pp. 113-121, 1991.

EDMONDS, J. & JOHNSON, E.: Matching, Euler Tours and the Chinese Postman Problem. *Mathematical Programming*, vol. 5, pp. 88-124, 1973.

EISELT, H.A.; GENDREAU, M.; LAPORTE, G.: Arc Routing Problems, Part I: The Chinese Postman Problem. *Operations Research*, vol. 43, n. 2, March-April, 1995.

EULER, L.: Solutio Problematis ad Geometrian Situs Pertinentis. *Commentarii academiae scientarum Petropolitanae*, 8, pp. 128-140, 1736.

FLEISCHNER, H.: Eulerian Graphs and Related Topics (Part 1, Volume 1). *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 45, North-Holland, Amsterdan, 1990.

FORD, L.R.; FULKERSON, D.R.: *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

FREDERICKSON, G.N.; HECHT, M.S.; KIM, C.E.: Approximation Algorithms for some Routing Problems. *SIAM J. Comp.*, vol. 7, pp. 178-193, 1978.

FREDERICKSON, G.N.: Approximation Algorithms for Some Postman Problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 26, n.3, pp.538-554, 1979.

GALIL, Z.; MICALI, S.; GABOW, H.: An O(EV log V) Algorithm for Finding a Maximal Weighted Matching in General Graphs. *SIAM J. Comp.*, vol. 15, pp. 120-130, 1986.

GHIANI, G.; IMPROTA, G.: Na algorithm for the hierarchical Chinese postman problem. *Operations Research Letters*, vol. 26, pp. 27-32, 2000.

GROTSCHEL, M.; WIN, Z.: A Cutting plane algorithm for the Windy Postman Problem. *Math. Prog.*, vol. 55, pp. 339-358, 1992.

GUAN, M.: Graphic Programming using odd and even points. *Chinese Math*, vol. 1, pp. 273-277, 1962.

JIANG, HUA; KANG, L.: Genetic algorithm for Chinese postman problems. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, vol. 8, n.1B, pp. 316-318, March, 2003.

KAUFFMAN, A.: *Graphs, Dynamic Programming and Finite Games*. Academic Press, New York, 1967.

KWAN, M.: Graphic Programming using odd or even points. *Chinese Math*, 1, pp.273-277, 1962.

LARSON, R.C. & ODONI, A.R.: *Urban Operations Research*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.

LAWLER, E.L.; *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Holt, Rinehart & Winston, New York, 1976.

LIN, Y. & ZHAO, Y.: A New Algorithm for the directed Chinese Postman Problem. *Computers & Operations Research*, vol. 15, n.6, pp. 577-584, 1988.

MARTI, R.; SANCHIS, J.M.; CORBERAN, A.: A GRASP heuristic for the mixed Chinese Postman Problem. *European Journal of Operational Research*, vol. 142, n. 1, pp. 70-80, Oct 2002.

MORÁBITO, R.N.: Notas de Aula de Pesquisa Operacional Aplicada à Logística. DEP, Ufscar, 1996.

NOBERT, Y; PICARD, J.C.: *An Optimal Algorithm for the Mixed Chinese Postman Problem*. Publication # 799. Centre de Recherche sur les transports. Montreal, Canadá, 1991.

ORLOFF, C.S; A fundamental problem in vehicle routing. *Networks*, vol. 4, pp. 35-64, 1974

PEARN, W.L. & CHOU, J.B.: Improved Solutions for the Chinese postman problem on mixed networks. *Computers & Operations Research*, vol. 26, pp. 819-827, 1999.

PEARN, W.L.; LIU, C.M.; Algorithms for the Chinese postman problem on mixed networks. *Computers Ops Res*, vol. 22, n. 5, pp. 479-489, 1995.

RARDIN, R.L.: *Optimization in Operations Research*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1998.

VAN AARDENNE-EHRENFEST, T.; BRUIJN, N.G.: Circuits and Trees in Oriented Linear graphs. *Simon Stevin*, vol. 28, pp. 293-217, 1951.

WANG, H.; WEN, Y.: Time constrained Chinese Postman Problems. *Computers and mathematics with Applications*, vol. 44, n. 3-4, pp. 375-387, 2002

YIN, Z.; ZHANG, F.; XU, J.: A Chinese Postman Problem based on DNA computing. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, vol. 42, n. 2, pp. 222-224, March-April, 2002.